Elemente ist. Wenn wir

$$w_i(x) = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \tag{5.165}$$

wählen, erhalten wir wieder die Methode der kleinsten Quadrate.

Einen besonders nützlichen Typ von Gewichtsfunktionen stellen die Basisfunktionen $\phi_i(x)$ dar, die dann zur *Galerkinschen Methode* führen,

$$\int R(x)\,\phi_i(x) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.166}$$

Was unser Beispiel betrifft, so haben wir

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2 p(x)}{\mathrm{d}x^2} - 6x \right) \phi_i(x) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.167}$$

Erinnern Sie sich daran, daß $p(x)$ stückweise linear ist und aus einer Reihe Geradenabschnitten besteht. In jedem Intervall ist die Steigung konstant – aber sie ändert sich von einem Intervall zum anderen, so daß die zweite Ableitung an den Endpunkten des Intervalls unendlich ist. Obwohl das als ein Problem erscheinen könnte, ist es nur eine Illusion – die Ableitung *ist* unendlich, aber wir befassen uns nur mit ihrem *Integral*. Durch partielle Integration des störenden Gliedes erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\phi_i \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,, \tag{5.168}$$

so daß wir nur endliche Größen berechnen müssen. Und durch unsere Wahl der Basis ist das erste Glied null, da $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ für $i = 1,\ldots, N-1$ ist. Das verbleibende Integral ist

$$-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\phi_j(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,, \quad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.169}$$

Die Verwendung eines solchen Standardbasissystems wie $\phi_i(x)$ bietet unter anderem den Vorteil, daß wir diese Integrale nicht bei jedem neuen Problem berechnen müssen. Statt dessen können wir sie *einmal* berechnen und die Ergebnisse bei späteren Problemen nutzen. Wenn die x_i zwischen den Grenzen a und b, mit $h = x_i - x_{i-1}$, gleichmäßig verteilt sind, dann ist

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\phi_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_j(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{h}\,, & |i-j| = 0\,, \\ -\dfrac{1}{h}\,, & |i-j| = 1\,, \\ 0\,, & |i-j| > 1\,. \end{cases} \tag{5.170}$$

Somit ist

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N}\alpha_j \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\phi_j(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha_{i-1}+2\alpha_i-\alpha_{i+1}}{h} \tag{5.171}$$

und die Gleichung (5.167) wird zu

$$\frac{\alpha_{i-1}-2\alpha_i+\alpha_{i+1}}{h} - \int_0^1 6x\phi_i(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.172}$$

In diesem Beispiel kann das verbleibende Integral analytisch behandelt werden,

$$\int_0^1 x\phi_i(x)\,\mathrm{d}x = hx_i\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.173}$$

Bei anderen Differentialgleichungen oder einer anderen Wahl von Basisfunktionen kann die numerische Integration erforderlich sein. Für die glatten Funktionen, die gewöhnlich in diesen Anwendungen auftauchen, ist die Gauß-Legendresche Quadratur oft die Methode, die gewählt wird.

Durch unsere Berechnung der Integrale wird aus der Gleichung (5.172) somit

$$\frac{\alpha_{i-1}-2\alpha_i+\alpha_{i+1}}{h} = 6hx_i\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.174}$$

Diesen Ausdruck erkennen wir als eine Komponente der Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N-2} \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6h^2x_1 - \alpha_0 \\ 6h^2x_2 \\ \vdots \\ 6h^2x_{N-2} \\ 6h^2x_{N-1} - \alpha_N \end{bmatrix}. \tag{5.175}$$

Mit Hilfe der bekannten Subroutine `TRISOLVE` kann nun dieses tridiagonale System nach den unbekannten α_i aufgelöst werden.

Die Wahl von $N = 2$ führt zu der einfachen Gleichung $\alpha_1 = 0{,}125$, welche die in Abb. 5.14 dargestellte stückweise lineare Approximation ergibt. Dieses Ergebnis ist, wie erwartet, nicht so genau wie die quadratische Approximation mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate. Werden in der stückweisen Approximation jedoch mehr Intervalle verwendet, läßt sich leicht ein besseres Ergebnis erzielen.

Übung 5.31

Wenden Sie über zehn Intervalle eine stückweise lineare Approximation an, um die Lösung für die Differentialgleichung besser zu approximieren. Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar, indem Sie die Approximation mit der exakten Lösung vergleichen.

5.22 Ein Eigenwertproblem

Die Methode der finiten Elemente kann auch auf Eigenwertprobleme angewendet werden. Obwohl sich die Herleitung der zu lösenden Gleichungen von der Herleitung mit endlichen Differenzen wesentlich unterscheidet, sehen die sich ergebenden Gleichungen einander ziemlich ähnlich. Das ist insofern unvorteilhaft, als die Prinzipien, welche den beiden Verfahren zugrunde liegen, wirklich ganz verschieden sind.

Wir wollen das Problem der schwingenden Saite untersuchen, das bestimmt wird von der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2 \mu(x)}{T} y = 0 \tag{5.176}$$

und unter Anwendung der stückweise linearen Approximation

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \phi_j(x) \tag{5.177}$$

$y(x)$ approximieren. α_0 und α_N sind wieder durch die Randbedingungen $y(0) = y(L) = 0$ bestimmt, so daß $\alpha_0 = \alpha_N = 0$ sind. Die verbleibenden $N - 1$ Koeffizienten α_i sind durch die Galerkinsche Bedingung bestimmt,

$$\int_0^L R(x)\,\phi_i(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,, \tag{5.178}$$

wobei der Restfehler

$$R(x) = \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2 \mu(x)}{T} p \tag{5.179}$$

ist. Somit erfüllen die α_i

$$\int_0^L \left[\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2 \mu(x)}{T} p\right] \phi_i(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.180}$$

Wir wollen erneut die partielle Integration anwenden, um das Integral der zweiten Ableitung zu berechnen,

$$\int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} \phi_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\phi_i\bigg|_0^L - \int_0^L \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,, \quad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{5.181}$$

Aufgrund der Wahl der Basisfunktionen ist der erste Term gleich null. Wir drücken nun $p(x)$ durch die $\phi_j(x)$ aus und stellen fest, daß die Galerkinsche Bedingung zu